Wärmeübertragung

Unter Wärmeübertragung versteht man sämtliche Erscheinungen, die einen räumlichen Transport von Wärme umfassen. Der Wärmeübergang erfolgt immer aufgrund eines Temperaturgefälles, und zwar immer von der höheren zur niederen Temperatur (2.Hauptsatz).

Grundsätzlich sind drei verschiedene Möglichkeiten der Wärmeübertragung möglich: Wärmeleitung, Konvektion und Strahlung:

Wärmeübertragung

/ \

mit Übertragungsmedium **ohne Übertragungsmedium**

/ \ |

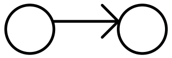
ohne Stoffbewegung **mit Stoffbewegung** **Strahlung**

| |

Wärmeleitung **Konvektion**

Wärmeleitung

- Bei der Wärmeleitung geben die Moleküle eines festen Körpers, einer Flüssigkeit oder eines Gases ihre Schwingungsenergie an benachbarte Moleküle weiter
  - Wärmeübertragung durch Impulsaustausch. Dabei verändern sie ihre Lage im Raum nicht.



Im folgenden wird nur stationäre, eindimensionale Wärmeleitung betrachtet, d.h.

• die Temperatur ändert sich nur in einer Raumrichtung

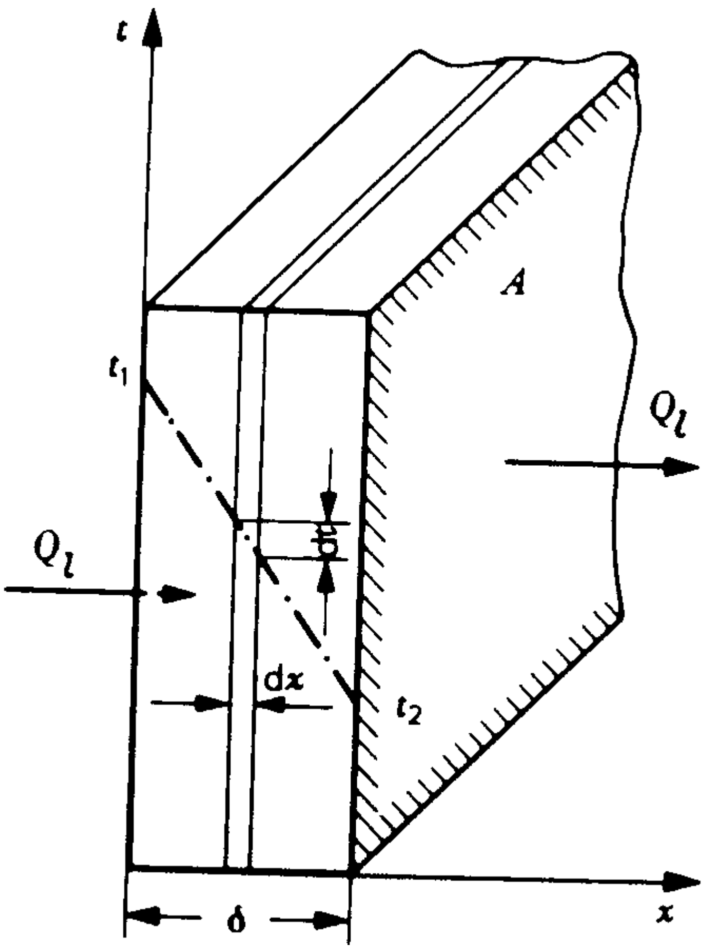
• die örtliche Temperatur ist zeitlich konstant ($T \neq f(t)$)

Wärmeleitung in der ebenen Wand

- Eine ebene Wand aus homogenem Material der Dicke d hat an ihren Oberflächen die Temperaturen T_1 und T_2.

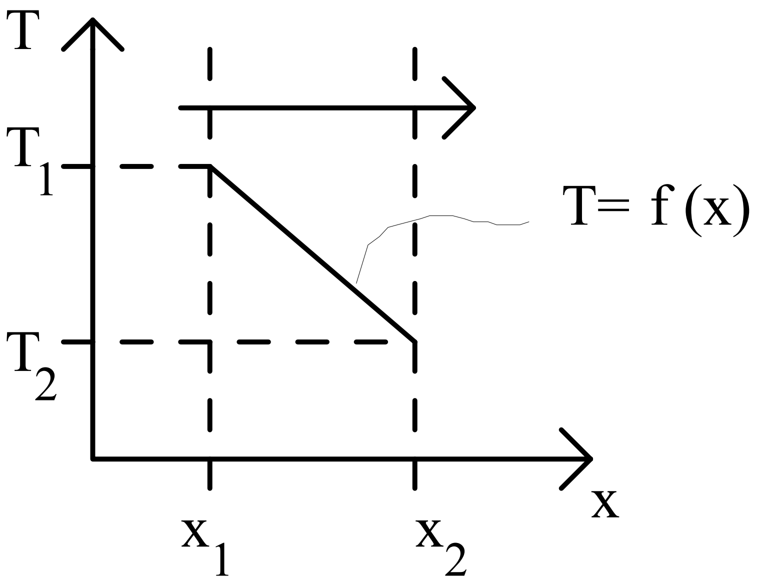
- Der durch die Wand geleitete Wärmestrom ist dem Temperatur-gradienten dT/dx und der Wandfläche A senkrecht zum Wärmestrom proportional.

- Der Proportionalitätsfaktor wird als Wärmeleitzahl oder Wärmeleit-fähigkeit λ bezeichnet.



Fouriersches Gesetz:

$$\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx}$$



• Der Wärmestrom fließt in umgekehrter Richtung zum Temperaturgradienten.

→ negatives Vorzeichen

• Die Wärmeleitfähigkeit λ ist eine temperaturabhängige Stoffkonstante:

• gute Wärmeleiter: großes λ

→ flacher Kurvenverlauf

• schlechte Wärmeleiter: kleines λ

→ steiler Kurvenverlauf

Die Wärmeleitfähigkeit

- Die Wärmeleitfähigkeit ist der Energiestrom, der bei einer Wandstärke von 1 m durch eine Fläche von 1 m², bei einer Temperaturdifferenz von 1 K geleitet, wird.

Material	**(W/m K)**
Cu	370
Al	210
Ziegelmauerwerk	0,4 - 0,6
Kesselstein	0,6 - 2,3
Beton	0,5-1,5
Holz	0,2
Isolierstoffe	0,03 - 0,12
Fensterglas	1,16
Eis	2,2
Schmieröle	0,12 - 0,17
Wasser	0,1-1
Wasserstoff	0,173(1 + 0,003 t)
Luft	0,024(1 + 0,003 t)

Bestimmung des Wärmestroms:

$$\boxed{\dot{Q} = -\lambda A \frac{dT}{dx}}$$

- Durch Integration des Fourierschen Gesetzes kann bei Kenntnis der Wärmeleitfähigkeit der Wärmestrom durch die Strecke Δx berechnet werden:

- Trennung der Variablen:

  $dx = -A\, dT$

$$\dot{Q}\int_{x_1}^{x_2} dx = -\lambda A \int_{T_1}^{T_2} dT$$

- Integration:

  $(x_2\text{-}x_1) = A\,(T_1\text{-}T_2)$

- Mit $d = x_2\text{-}x_1$ und $\Delta T = T_1\text{-}T_2$ folgt: $\dot{Q} = A\frac{\lambda}{d}\Delta T$ in W,

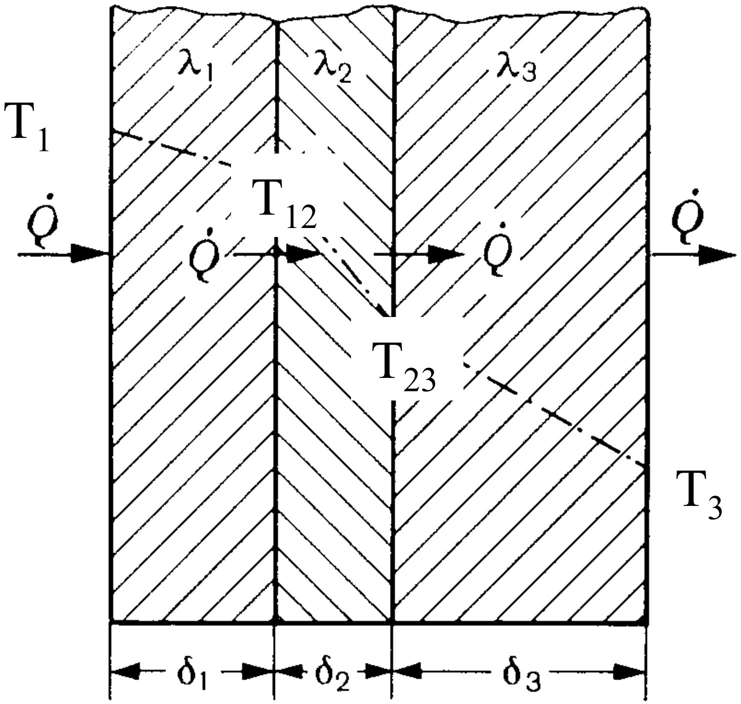
spezifisch: $\dot{q} = \frac{\lambda}{d}\Delta T$ in W/m².

Bestimmung des Wärmestroms:

Liegen mehrere Schichten vor, dann gilt ebenfalls für jeden Abschnitt das Fouriersche Gesetz. Da es sich um einen stationären Vorgang handelt, muß wegen der Energieerhaltung durch jede Schicht der gleiche Wärmestrom fließen.

Für jede Schicht gilt:

$$\dot{Q} = A\frac{\lambda}{d}\Delta T$$



Liegen die Schichten dicht (ohne Luftspalt) aneinander, dann sind die Temperaturen der angrenzenden Flächen gleich.

Für $\dot{Q}$ = constant gilt:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{d_1}A(T_1 - T_{12}) = \frac{\lambda_2}{d_2}A(T_{12} - T_{23}) = \frac{\lambda_3}{d_3}A(T_{23} - T_3)$$

Bestimmung des Wärmestroms:

$$\dot{Q} = \frac{\lambda_1}{d_1} A(T_1 - T_{12}) = \frac{\lambda_2}{d_2} A(T_{12} - T_{23}) = \frac{\lambda_3}{d_3} A(T_{23} - T_3)$$

- Eliminieren der Zwischentemperaturen:

$$\frac{\dot{Q} d_1}{A \lambda_1} = T_1 - T_{12}$$

$$\frac{\dot{Q} d_2}{A \lambda_2} = T_{12} - T_{23}$$

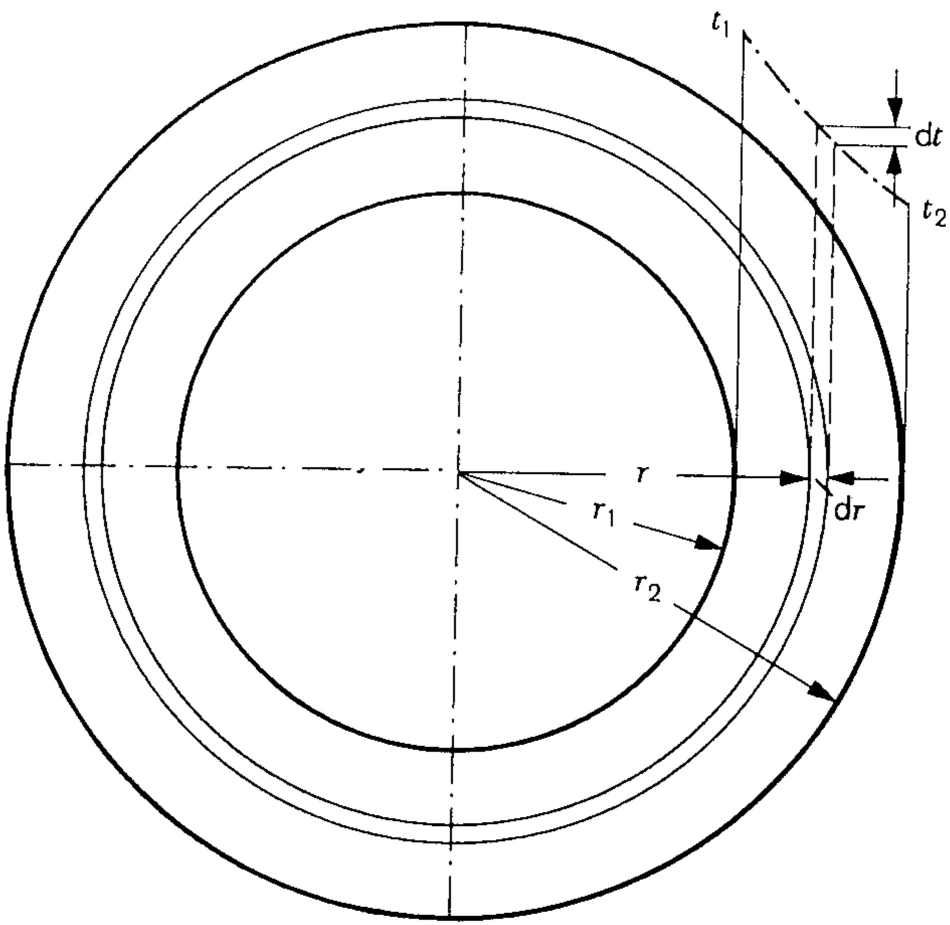
$$\frac{\dot{Q} d_3}{A \lambda_3} = T_{23} - T_3$$

$$\frac{\dot{Q}}{A}\left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3}\right) = T_1 - T_3$$

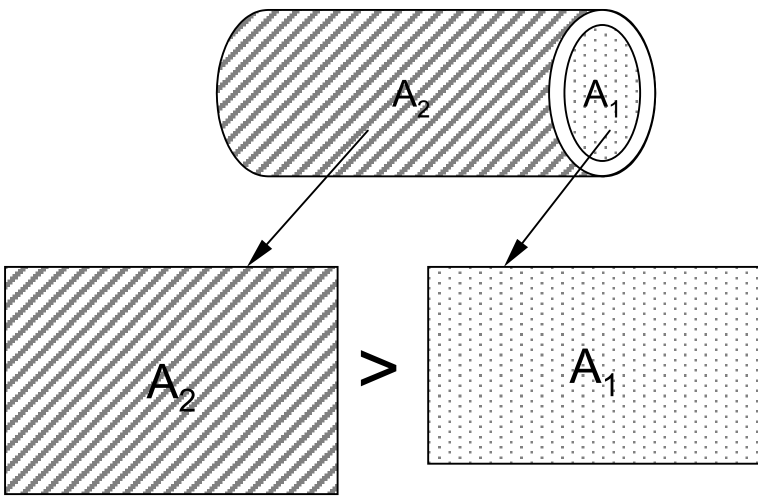
$$\dot{Q} = A \frac{T_1 - T_3}{\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3}}$$

$$\boxed{\dot{Q} = A \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i}}} \qquad \boxed{\dot{q} = \frac{\Delta T}{\sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i}}}$$

Wärmeleitung durch Rohrwände



B 8.3 Stationäre Wärmeleitung durch eine einschichtige zylindrische Wand



- Beim Rohr ändert sich die Querschnittsfläche A für die Wärmeübertragung in Abhängigkeit von dr. A nimmt mit dem Rohrradius zu, der Wärmestrom bleibt aber konstant. Er verteilt sich somit nach außen hin auf eine immer größere Fläche, d.h. der Wärmeleitungswiderstand wird immer größer kein linearer Temperaturverlauf!

- <u>Fourier-Gleichung</u>: $\dot{Q}_R = -\lambda 2\pi r L \frac{dT}{dr}$ mit A = 2rL,

r: Rohrradius,

L: Rohrlänge

$$\dot{Q}_R \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi L dT$$

$$\dot{Q}_R \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\lambda 2\pi L \int_{T_1}^{T_2} dT$$

$$\dot{Q}_R \ln\frac{r_2}{r_1} = \lambda 2\pi L (T_1 - T_2)$$

$$\boxed{\dot{Q}_R = L \frac{\lambda 2\pi (T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}$$

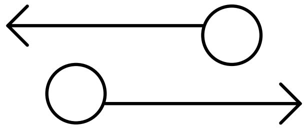
$$\dot{q}_R = \frac{\dot{Q}}{L}$$

$$\boxed{\dot{q}_R = \frac{\lambda 2\pi (T_1 - T_2)}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}$$

Konvektion

- Bei Konvektion bewegen sich die Moleküle eines Fluids durch den Raum und transportieren dabei Wärmeenergie. Konvektion ist daher wie Wärmeleitung an Materie gebunden.

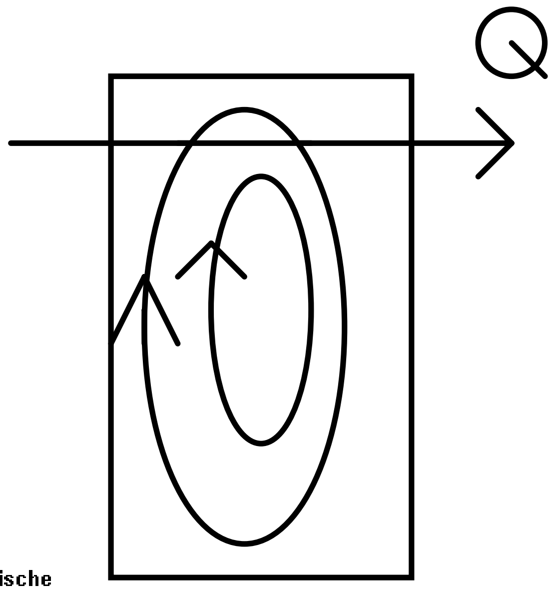
- Flüssigkeiten und Gase:
  – schlechte Wärmeleitung, aber guter Wärmetransport durch Konvektion, da Teilchen leicht beweglich
- Feststoffe:
  – keine Konvektion, da Teilchen im Gitter fest gebunden

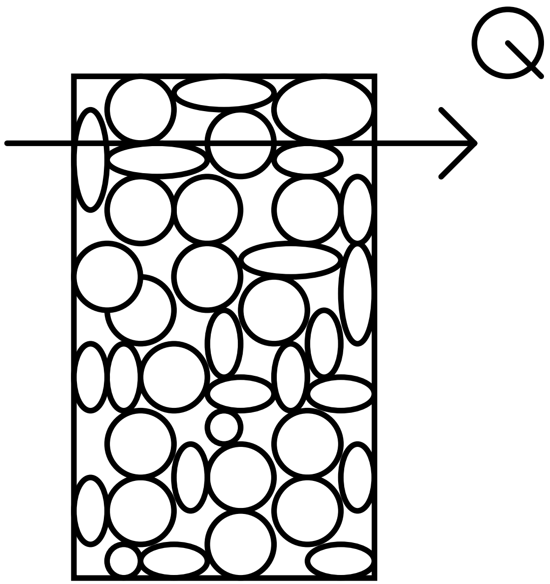


Wärmedämmung durch Luft

- Einfache Gasschicht
- wärmetransportierende Konvektionsströmung stellt sich ein

- Isolator (schaumartig)
- durch Unterteilung in viele kleine Gasräume wird die Konvektionsströmung unterbunden





Freie / erzwungene Konvektion

Unterscheidung von:

Konvektion

<u>freie Konvektion</u> | <u>erzwungene Konvektion</u>

(natürliche Konvektion) | (künstlich erzeugt)

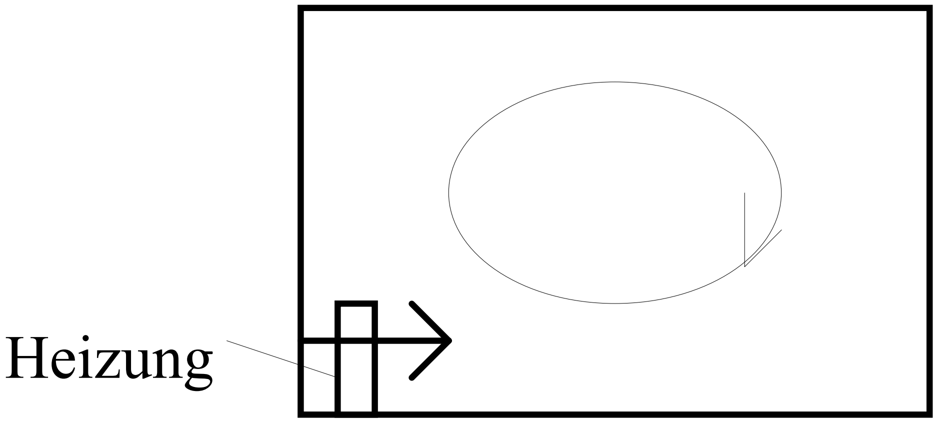
Stoffbewegung durch Dichte- | Stoffbewegung durch Druckunterschiede

unterschiede (Luftzirkulation) | (Pumpen, Ventilatoren)

Beispiel für freie Konvektion: beheiztes Zimmer

- Luft wird durch Erwärmung an der Heizung spezifisch leichter steigt nach oben
- durch Abkühlung in der anderen Zimmerhälfte wird die Luft spezifisch schwerer und sinkt wieder nach unten

→ Luftzirkulation



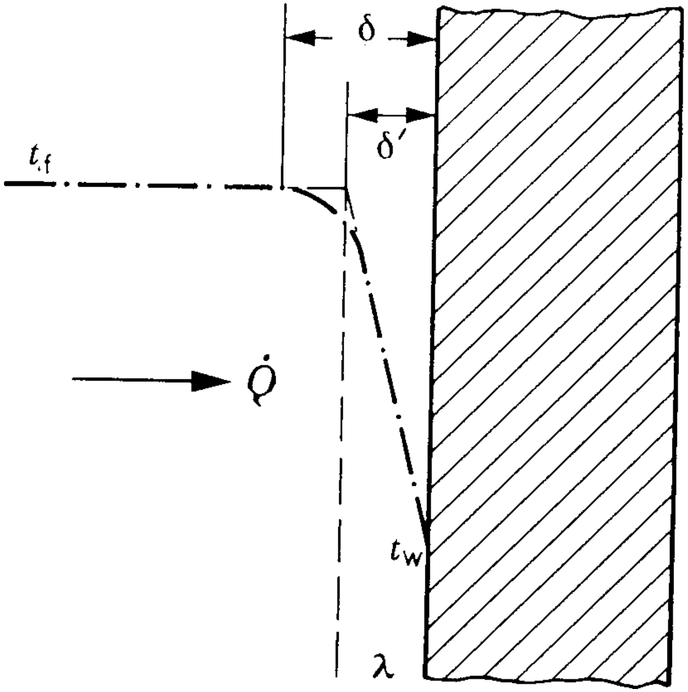
Wärmeübergang

- in Wandnähe: laminare Grenzschicht, d.h. die Teilchen bewegen sich auf parallelen Bahnen keine Quervermischung der Teilchen
- weiter weg: laminare oder turbulente Strömung (in Abhängigkeit von der Strömungsgeschwindigkeit, den Eigenschaften des Fluids (siehe Re-Zahl) und der Wandoberfläche
- direkt an der Wand: durch Wandreibung $c = 0$ ("Wandhaftbedingung") hier nur Wärmeleitung

Newtonsches Gesetz

$$\dot{Q} = A\alpha\Delta T$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = \alpha\Delta T$$



Δ T : Temperaturgefälle zwischen Fluid und Wand

α : Wärmeübergangszahl in W/m² K

$\dot{q}$: flächenspezifischer übergehender Wärmestrom oder Wärmestromdichte in W/m²

Wärmeübergangszahl α

- Die Wärmeübergangszahl kann verstanden werden als der Wärmestrom, der auf 1 m² Wandfläche, je K Temperaturdifferenz übergeht.
- hängt z.B. ab von:
  - physikalischen Eigenschaften der Stoffe (Dichte, Wärmekapazität, Wärmeleitfähigkeit, Viskosität, ...)
- - Art der Strömung und der Strömungsgeschwindigkeit
- - Geometrie des um- oder durchströmten Körpers
- - Oberflächenbeschaffenheit

(berücksichtigt auch Wärmeleitung und -strahlung)

"In ist alles enthalten, was wir nicht wissen,,

Wärmedurchgang durch eine ebene Wand:

Der Wärmestrom durch die Wand ist an jeder Stelle in x-Richtung gleich groß:

$$\dot{Q} = A\alpha_i (T_i - T_{wi}) = A\frac{\lambda}{d}(T_{wi} - T_{wa}) = A\alpha_a (T_{wa} - T_a)$$

Eliminierung der Wandtemperaturen:

$$\dot{Q} = A\frac{(T_i - T_a)}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

$$\dot{Q} = Ak\Delta T \qquad \dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A} = k\Delta T$$

Für mehrschichtige Wände gilt analog:

$$\dot{Q} = A\frac{\Delta T}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

Wärmedurchgangszahl in W/m²K

(Merkregel: k ist immer kleiner als der kleinste α -Wert)

Wärmedurchgang durch Rohrwände

- Für einschichtige Rohre:

$$\dot{Q}_R = L \frac{2\pi \Delta T}{\frac{1}{r_i \alpha_i} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_a}{r_i} + \frac{1}{r_a \alpha_a}}$$

- Für mehrschichtige Rohre:

$$\dot{Q}_R = L \frac{2\pi \Delta T}{\frac{1}{r_1 \alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{r_n \alpha_n}}$$

- Wärmedurchgangszahl

$$k_R = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_1 \alpha_1} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + \frac{1}{r_n \alpha_n}}$$

$$\boxed{\dot{Q}_R = L k_R \Delta T}$$

$$\boxed{\dot{q}_R = \frac{\dot{Q}}{L} = k_R \Delta T}$$

1. Übung TWL 2 im WS 05/06: Wärmedurchgang

Lit.: Elsner, Cerbe/Hoffmann

Eine Hauswand mit der Fläche A = 50 m² hat den folgenden Aufbau:

Außenputz	$d_1 = 4$ cm,	$\lambda_1 = 0{,}79$ W/mK
Isolation	$d_2 = 10$ cm	$\lambda_2 = 0{,}031$ W/mK
Ziegelmauer	$d_3 = 24$ cm	$\lambda_3 = 0{,}46$ W/mK
Innenputz	$d_4 = 1{,}5$ cm	$\lambda_4 = 0{,}76$ W/mK

Die Wärmeübergangszahl zwischen Raumluft und Wand beträgt $\alpha_i = 7{,}5$ W/m² K, diejenige zwischen Wand und Außenluft beträgt $\alpha_a = 25$ W/m² K. Die Temperatur im Raum beträgt $t_i = 20$ °C und die Außenlufttemperatur $t_a = -12$ °C.

Ermitteln Sie

a.) die Wärmedurchgangszahl k in W/m² K dieser Wand,

b.) den spezifischen Wärmestrom $\dot{q}$ in W/m² und den absoluten Wärmestrom $\dot{Q}$ in W, (Diskutieren Sie, wodurch der Wärmestrom entscheidend bestimmt ist und welchen Effekt die Dämmung hat.)

c.) die Temperatur an der Oberfläche der Außenseite t_{wa}, die Temperaturen der Grenzschichten t_{12}, t_{23}, t_{34} und die Temperatur an der Oberfläche der Innenseite t_{wi} in °C. Was würde sich bei einer Innendämmung ändern und was hätte dieses für Konsequenzen?

d.) Zeichnen Sie den Temperaturverlauf in der Wand auf.

Ermitteln Sie

e.) die Wärmedurchgangszahl eines Einfachfensters k_{EF} in W/m² K und den Wärmestrom $\dot{Q}$ durch das Fenster bei einer Fläche A von 4 m² ($d_{EF} = 4$ mm, $\lambda_{EF} = 1{,}16$ W/mK, α_i, α_i wie oben).

f.) Wie groß wäre der Wärmestrom durch ein Dreifachfenster bei gleicher Glasstärke und einem Scheibenabstand von $d_L = 3$ mm? Die Luft im Zwischenraum kann als ruhend angenommen werden mit $\lambda_L = 0{,}023$ W/mK und $\alpha_{Glas/Luft} = 5$ W/m² K.

g.) Vergleichen Sie die spezifischen Wärmeströme von Wand, Einfach- und Dreifachfenster und stellen Sie den Effekt der Dreifachverglasung in Zusammenhang mit der Fenstergröße im Bezug auf die Größe der Wand.

1. Übung TWL II im WS 05/06

a.) Die Wärmedurchgangszahl k in W/m² K dieser Wand:

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{\lambda_i} + \frac{1}{\alpha_a}} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \frac{d_4}{\lambda_4} + \frac{1}{\alpha_a}} =$$

$$k = \frac{1}{\frac{1m^2K}{7{,}5W} + \frac{0{,}04m \cdot mK}{0{,}79W} + \frac{0{,}1m \cdot mK}{0{,}031W} + \frac{0{,}24m \cdot mK}{0{,}46W} + \frac{0{,}015m \cdot mK}{0{,}76W} + \frac{1m^2K}{25W}}$$

$$k = 0{,}25 \frac{W}{m^2K}$$

b.) Den spezifischen Wärmestrom $\dot{q}$ in W/m² und den absoluten Wärmestrom $\dot{Q}$ in W:

spezifisch:

$$\dot{q} = 0{,}25 \frac{W}{m^2K} \cdot (20 - (-12))K = 8 \frac{W}{m^2}$$

absolut:

$$\dot{Q} = \dot{q} \cdot A = 8 \frac{W}{m^2} \cdot 50m^2 = 400W$$

c.) Die Temperatur t_{wi} an der Oberfläche der Innenseite:

$$\dot{q} = \alpha_i \cdot (t_i - t_{wi}) \Leftrightarrow t_{wi} = t_i - \frac{\dot{q}}{\alpha_i} = 20°C - \frac{8\frac{W}{m^2}}{7{,}5\frac{W}{m^2K}} = 18{,}93°C$$

Die Temperaturen der Grenzschichten t_{12}, t_{23}, t_{34}:

$$\dot{q} = \frac{\lambda_4}{d_4} \cdot (t_{wi} - t_{34}) \Leftrightarrow t_{34} = t_{wi} - \frac{\dot{q} \cdot d_4}{\lambda_4} = 18{,}93°C - \frac{8\frac{W}{m^2} \cdot 0{,}015m}{0{,}76\frac{W}{mK}} = 18{,}77°C$$

$$t_{23} = t_{34} - \frac{\dot{q} \cdot d_3}{\lambda_3} = 18{,}77°C - \frac{8\frac{W}{m^2} \cdot 0{,}024m}{0{,}46\frac{W}{mK}} = 14{,}59°C$$

$$t_{12} = t_{23} - \frac{\dot{q} \cdot d_2}{\lambda_2} = 14{,}59°C - \frac{8\frac{W}{m^2} \cdot 0{,}1m}{0{,}031\frac{W}{mK}} = -11{,}27°C$$

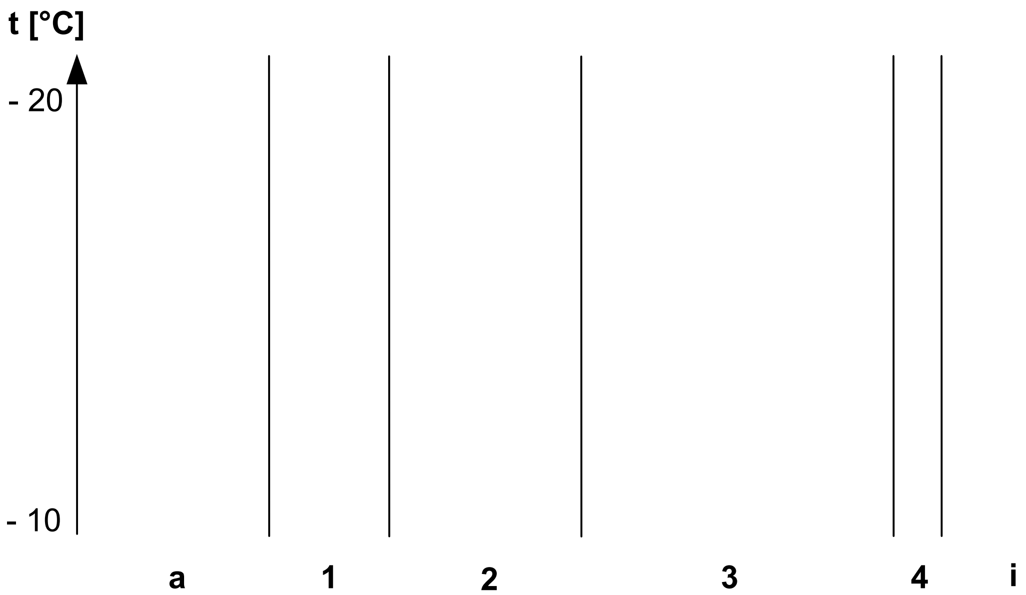
Die Temperatur t_{wa} an der Oberfläche der Außenseite:

$$t_{wa} = t_{12} - \frac{\dot{q} \cdot d_1}{\lambda_1} = -11{,}27°C - \frac{8\frac{W}{m^2} \cdot 0{,}04m}{0{,}79\frac{W}{mK}} = -11{,}68°C$$

Probe: Berechnung der Außentemperatur:

$$t_a = t_{wa} - \frac{\dot{q}}{\alpha_a} = -11{,}68°C - \frac{8\,\frac{W}{m^2}}{25\,\frac{W}{m^2 K}} = -12°C$$

d.) Zeichnen Sie den Temperaturverlauf in der Wand auf



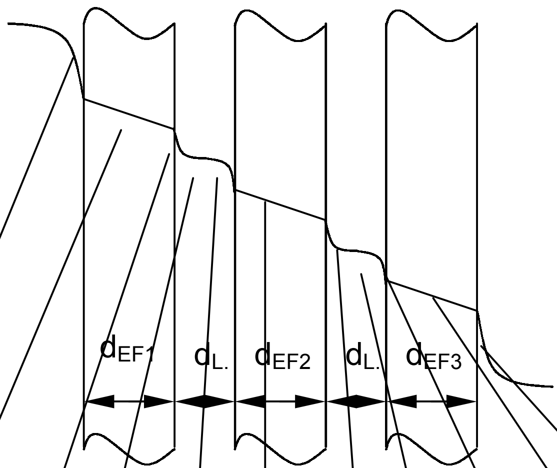
e.) Die Wärmedurchgangszahl eines Einfachfensters k_{EF} in W/m²·K und den spezifischen Wärmestrom $\dot{q}$ [W/m²] durch das Fenster bei einer Fläche A_{EF} von 4 m² mit (d_{EF} = 4 mm; λ_{EF} = 1,16 W/m·K; α_i = 7,5 W/m²·K ; α_a = 25 W/m²·K) .

Fo.sa.: $$k_{EF} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_{EF}}{\lambda_{EF}} + \frac{1}{\alpha_a}} = \frac{1}{\frac{1}{7{,}5\frac{W}{m^2 \cdot K}} + \frac{0{,}004\ m}{1{,}16\frac{W}{m \cdot K}} + \frac{1}{25\frac{W}{m^2 \cdot K}}} = 5{,}66\frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$\dot{Q} = k_{EF} \cdot A_{EF} \cdot \Delta T = 5{,}66\ \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot 4\ m^2 \cdot 32\ K = 724{,}48\ W$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A_{EF}} = \frac{724{,}48\ W}{4\ m^2} = \underline{\underline{181{,}12\ \frac{W}{m^2}}}$$

f.) Wie groß wäre der spezifischen Wärmestrom $\dot{q}$ [W/m²] durch ein Dreifachfenster bei gleicher Glasstärke und einem Scheibenabstand von d_L = 3 mm ? Die Luft im Zwischenraum kann als ruhend angenommen werden mit λ_L = 0,023 W/m·K und $\alpha_{Gl./L.}$ = 5 W/m²·K.



Fo.sa.: $$k_{EF} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_{EF1}}{\lambda_{EF1}} + \frac{1}{\alpha_{Gl./L.}} + \frac{d_{L.}}{\lambda_{L.}} + \frac{1}{\alpha_{Gl./L.}} + \frac{d_{EF2}}{\lambda_{EF2}} + \frac{1}{\alpha_{Gl./L.}} + \frac{d_{L.}}{\lambda_{L.}} + \frac{1}{\alpha_{Gl./L.}} + \frac{d_{EF3}}{\lambda_{EF3}} + \frac{1}{\alpha_a}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{7{,}5\frac{W}{m^2 \cdot K}} + \frac{0{,}004m}{1{,}16\frac{W}{m \cdot K}} + \frac{1}{5\frac{W}{m^2 \cdot K}} + \frac{0{,}003m}{0{,}023\frac{W}{m \cdot K}} + \frac{1}{5\frac{W}{m^2 \cdot K}} + \frac{0{,}004m}{1{,}16\frac{W}{m \cdot K}} + \frac{1}{5\frac{W}{m^2 \cdot K}} + \frac{0{,}003m}{0{,}023\frac{W}{m \cdot K}} + \frac{1}{5\frac{W}{m^2 \cdot K}} + \frac{0{,}004m}{1{,}16\frac{W}{m \cdot K}} + \frac{1}{25\frac{W}{m^2 \cdot K}}}$$

$$k_{EF} = 0{,}804\frac{W}{m^2 \cdot K}$$

$$\dot{Q} = k_{EF} \cdot A_{EF} \cdot \Delta T = 0{,}804 \frac{W}{m^2 \cdot K} \cdot 4\ m^2 \cdot 32\ K = 102{,}91\ W$$

$$\dot{q} = \frac{\dot{Q}}{A_{EF}} = \frac{102{,}91\ W}{4\ m^2} = \underline{\underline{25{,}73 \frac{W}{m^2}}}$$